

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Инженерно-физический факультет высоких технологий
Кафедра радиофизики и электроники

Елисеева С.В., Гадомский О.Н.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

«СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА И НАНООПТИКА»

Ульяновск 2022

Методические указания для самостоятельной работы студентов бакалавриата направления 03.03.03 «радиофизика» и 28.03.02 «наноинженерия» по дисциплине «Статистическая радиофизика и нанооптика» / составитель: С.В. Елисеева. - Ульяновск: УлГУ, 2022.

Настоящие методические указания предназначены для студентов бакалавриата направления 03.03.03 «радиофизика» и 28.03.02 «наноинженерия», изучающих дисциплину «Статистическая радиофизика и нанооптика». В методических указаниях приведены: литература по дисциплине, основные темы курса для самостоятельной работы студентов, рассмотрены выборочные вопросы.

Студентам заочной формы обучения следует использовать данные методические указания при самостоятельном изучении дисциплины. Студентам очной формы обучения данное пособие будет полезно при подготовке к практическим занятиям, зачету и экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс решением Ученого совета Инженерно-физического факультета высоких технологий УлГУ (протокол №8 от 22 марта 2022 г.).

Цели освоения дисциплины:

Целью освоения дисциплины является подготовка физика к деятельности в области разработки и исследования статистической радиофизики и нанооптики, являющихся одним из важнейших компонентов современной электроники.

Основными задачами изучения дисциплины являются:

- изучение основных принципов статистической радиофизики и нанооптики и демонстрация этих принципов устройствах различного назначения;
- ознакомление с достижениями и перспективными направлениями развития нанооптики;
- формирование у студентов навыков исследования отдельных компонентов оптоэлектронных устройств.

Дисциплина «Статистическая радиофизика и нанооптика» входит в базовую часть дисциплин основной профессиональной образовательной программы (ОПОП) бакалавров, преподается в 8-м семестре 4-ого курса бакалаврам очной формы обучения после завершения общего курса.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Введение.

Тема 1. Предмет статистической радиофизики. Нанооптика.

Раздел 2. Основные определения

Тема 1. Случайные величины. Вероятность. Плотность вероятности случайных процессов.

Тема 2. Математическое ожидание. Начальные моменты. Флуктуации.

Раздел 3. Корреляционные функции

Тема 1. Определение корреляционной функции. Статистически независимые случайные процессы. АКФ и ВКВ.

Тема 2. Стационарные случайные процессы

Тема 3. Характеристические функции. Кумулянты

Тема 4. Спектральная плотность. Формулы Винера-Хинчина. Белый шум.

Тема 5. Кинетическое уравнение Больцмана

Раздел 4. Марковские процессы

Тема 1. Уравнение Смолуховского. Уравнение Колмогорова. Двумерные плотности вероятности.

Тема 2. Дробовой шум. Распределение Пуассона.

Тема 3. Тепловой шум.

Раздел 5. Квантовые флуктуации

Тема 1. Квантовые флуктуации одной физической величины.

Тема 2. Квантовые флуктуации двух физических величин.
Электромагнитные флуктуации.

Тема 3. Черное излучение.

Тема 4. Взаимодействие между твердыми телами.

Тема 5. Флуктуации в линейных цепях.

Раздел 6. Нанооптика.

Тема 1. Уравнения распространения электромагнитных волн.

Тема 2. Уравнения движения для материальных переменных.

Тема 3. Метаматериалы со случайным близким к нулю показателем преломления.

Выборочные вопросы

1. Вероятностные и временные характеристики случайного процесса

Теорией случайных процессов называется математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений в динамике их развития.

При изучении ряда явлений приходится наблюдать процессы, характеризуемые функциями, которые в зависимости от исхода опыта принимают различный вид. Некоторые примеры таких функций: напряжение в электросети, номинально постоянное и равное 220 В, фактически меняется во времени в зависимости от количества и мощностей включенных в сеть приборов, моментов их включений и выключений; уровень воды в водохранилище зависит от погоды, количества осадков, таяния снега, интенсивности оросительных мероприятий и т.д.; население города меняется с течением времени случайным образом под влиянием таких факторов, как рождаемость, смертность, миграция; траектория частицы, совершающей броуновское движение меняется случайным образом в результате соударений с молекулами жидкости (или газа); сигнал на входе радиоприемника под воздействием помех и другие.

Случайной функцией $X(t)$ называют функцию неслучайного аргумента t ,

которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Если параметр t время, то случайную функцию называют случайным процессом. Случайная величина $X(t_0)$, в которую обращается случайный процесс при (фиксированном значении параметра) $t=t_0$ называется *сечением* случайного процесса, соответствующим данному значению аргумента t . Таким образом, случайную функцию можно рассматривать как совокупность случайных величин $\{X(t)\}$, зависящих от параметра t .

Возможным значением случайного процесса $X(t)$ является неслучайная функция $x(t)$, которая наблюдается на каком-то отрезке времени от 0 до T . Конкретный вид, который принимает случайный процесс в результате опыта, называется *реализацией* случайного процесса.

Случайные процессы разделяются на непрерывные и дискретные по времени и по состояниям. Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots$, число которых конечно или счетно. Сечения такого процесса в моменты времени t_1, t_2, \dots образуют последовательность случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots$

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывным временем*, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент t наблюдаемого периода $[0; T]$.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывными состояниями*, если его сечение в любой момент t представляет собой непрерывную случайную величину. Случайный процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной случайной величиной $X(t)$.

Исчерпывающей характеристикой случайной величины является ее функция распределения. Функция двух переменных $F(x, t) = P\{X(t) < x\}$, равная при каждом фиксированном значении t функции распределения сечения $X(t)$ называется *одномерным законом* распределения случайного процесса.

Однако эта функция не является полной характеристикой случайного процесса $X(t)$, поскольку не отражает зависимость между различными сечениями случайного процесса. Двумерным законом распределения случайного процесса $X(t)$ является функция четырех аргументов

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\},$$

равная совместной функции распределения двух сечений случайного процесса $X(t)$, взятых соответственно для моментов t_1 и t_2 . Но и двумерный закон не является исчерпывающей характеристикой случайного процесса.

Чтобы полностью задать случайный процесс $X(t)$ надо знать все n -мерные законы распределения $F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$. Однако оперировать со столь громоздкими характеристиками, зависящими от многих аргументов крайне неудобно; к тому же объем экспериментального материала, необходимого для их получения, с увеличением числа сечений растет чрезвычайно быстро. Поэтому на практике более чем двумерные законы распределения применяются крайне редко. Кроме того, существуют процессы (например, марковские, гауссовские) для которых двумерный закон распределения является исчерпывающей характеристикой.

Корреляционной теорией случайных функций называют теорию, основанную на изучении моментов первого и второго порядка. Эта теория оказывается достаточной для решения многих задач практики. В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами, моменты случайной функции являются неслучайными функциями.

Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $m_X(t)$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса $m_X(t) = MX(t)$. Геометрически математическое ожидание случайной функции можно истолковать как «среднюю кривую», вокруг которой происходит разброс реализаций случайного процесса.

Если сечение случайного процесса $X(t)$ при данном t представляет собой дискретную случайную величину с рядом распределения

$$X(t) \quad x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_i(t) \quad \dots$$

$$P(t) \quad p_1(t) \quad p_2(t) \quad \dots \quad p_i(t) \quad \dots,$$

то его математическое ожидание может быть вычислено по формуле

$$m_x(t) = \sum_i x_i(t) \cdot p_i(t).$$

Если сечение случайного процесса $X(t)$ при данном t является непрерывной случайной величиной с плотностью распределения $f(x,t) = F'_x(x,t)$, то математическое ожидание можно вычислить по формуле

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,t)dx.$$

Используя свойства математического ожидания случайной величины, легко получить свойства математического ожидания случайной функции.

1. Математическое ожидание неслучайной функции $\varphi(t)$ равно самой неслучайной функции: $M\varphi(t) = \varphi(t)$.

2. Неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно выносить за знак математического ожидания: $M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t) \cdot MX(t) = \varphi(t)m_x(t)$.

3. Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t).$$

Дисперсией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная неотрицательная функция $D_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения, соответствующего этому значению аргумента: $D_X(t) = DX(t)$. Дисперсия характеризует степень рассеяния возможных реализаций (кривых) вокруг математического ожидания случайной функции («средней кривой»).

Из определения дисперсии случайной величины получаются формулы вычисления дисперсии случайного процесса:

$$DX(t) = M[(X(t) - m_x(t))^2] = M[X^2(t)] - m_x^2(t).$$

Зная закон распределения любого сечения случайного процесса $X(t)$, можно найти дисперсию случайного процесса. Если сечение $X(t)$ является дискретной случайной величиной, то дисперсия находится по формуле:

$$D_x(t) = \sum_i (x_i(t) - m_x(t))^2 p_i(t) \quad \text{или} \quad D_x(t) = \sum_i x_i^2(t) p_i(t) - m_x^2(t).$$

Если сечение $X(t)$ представляет собой непрерывную случайную величину с плотностью $f(x,t)$, то дисперсия может быть вычислена по формуле

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x,t) dx \quad \text{или} \quad D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,t) dx - m_x^2(t).$$

Свойства дисперсии случайной функции аналогичны свойствам дисперсии случайной величины.

1. Дисперсия неслучайной функции $\varphi(t)$ равна нулю: $D\varphi(t) = 0$.
2. Дисперсия суммы случайной функции $X(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$ равна дисперсии случайной функции: $D[X(t) + \varphi(t)] = D_x(t)$.
3. Неслучайный множитель выносится из под знака дисперсии в квадрате:

$$D[\varphi(t)X(t)] = \varphi^2(t) \cdot D_x(t).$$

Средним квадратическим отклонением случайной функции называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$. Размерность функции $\sigma_x(t)$ равна размерности случайного процесса $X(t)$.

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $K_x(t_1, t_2)$ двух аргументов t_1 и t_2 , которая при каждой паре значений аргументов t_1 и t_2 равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса $X(t_1)$ и $X(t_2)$:

$$K_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [X(t_2) - m_x(t_2)]\} \quad \text{или} \quad K_x(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)\right],$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$ - центрированный случайный процесс.

Преобразовав формулу для вычисления ковариации, получим:

$$K_x(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot X(t_2)] - m_x(t_1) \cdot m_x(t_2).$$

Свойства корреляционной функции.

1. Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

2. При равенстве аргументов корреляционная функция равна дисперсии

$$K_x(t, t) = D_x(t).$$

3. Корреляционная функция неслучайной функции равна нулю.

4. Прибавление к случайному процессу неслучайного слагаемого не изменяет корреляционной функции. Если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2).$$

5. При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$: если $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, то $K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1, t_2)$.

6. Абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:

$$|K_X(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_X(t_1)D_X(t_2)}.$$

Для оценки степени линейной зависимости двух случайных величин используется коэффициент корреляции. В теории случайных функций аналогом этой характеристики служит нормированная корреляционная функция.

Нормированной корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых переменных t_1 и t_2 , значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов t_1 и t_2 равно коэффициенту корреляции сечений, соответствующих этим значениям аргументов:

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}.$$

Нормированная корреляционная функция имеет те же свойства, что и корреляционная функция. Причем свойство 6 заменяется на следующее: абсолютная величина нормированной корреляционной функции не превышает единицы: $|r_X(t_1, t_2)| \leq 1$.

При равных значениях аргументов $t_1 = t_2 = t$ нормированная корреляционная функция равна единице: $r_X(t, t) = 1$.

Нормированная корреляционная функция имеет тот же вероятностный

смысл, что и коэффициент корреляции: чем ближе модуль этой функции к единице, тем линейная связь между сечениями сильнее; чем ближе модуль этой функции к нулю, тем эта связь слабее.

Для того чтобы оценить степень зависимости сечений двух случайных функций вводят взаимную корреляционную функцию.

Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $K_{XY}(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2 , значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений обеих случайных процессов, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m_X(t_1)) \cdot (Y(t_2) - m_Y(t_2))]$$

$$\text{или } K_{XY}(t_1, t_2) = M[X(t_1) \cdot Y(t_2)] - m_X(t_1) \cdot m_Y(t_2).$$

Коррелированными называют две случайные функции, если их взаимная корреляционная функция не равна нулю. *Некоррелированными* называют две случайные функции, взаимная корреляционная функция которых тождественно равна нулю.

Свойства взаимной корреляционной функции.

1. При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не меняется:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = K_{YX}(t_1, t_2).$$

2. Прибавление к случайным функциям $X(t)$ и $Y(t)$ неслучайных слагаемых, соответственно $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, не изменяет их взаимной корреляционной функции: если $\tilde{X}(t) = X(t) + \varphi(t)$ и $\tilde{Y}(t) = Y(t) + \psi(t)$, то $K_{\tilde{X}\tilde{Y}}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1, t_2)$.

3. При умножении случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ на неслучайные множители $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно взаимная корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\psi(t_2)$: если $\tilde{X}(t) = X(t)\varphi(t)$ и $\tilde{Y}(t) = Y(t)\psi(t)$, то $K_{\tilde{X}\tilde{Y}}(t_1, t_2) = K_{XY}(t_1, t_2)\varphi(t_1)\psi(t_2)$.

4. Абсолютная величина взаимной корреляционной функции двух случайных процессов не превышает среднего геометрического их дисперсий:

$$|K_{XY}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_X(t_1)D_Y(t_2)}.$$

5. Если взаимная корреляционная функция тождественно равна нулю, то случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются некоррелированными. Для некоррелированных случайных процессов выполняется равенство: $M[X(t_1) \cdot Y(t_2)] = m_X(t_1) \cdot m(t_2)$.

6. Корреляционная функция суммы двух коррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых и взаимной корреляционной функции, которая прибавляется дважды (с разным порядком следования аргументов): если $Z(t) = X(t) + Y(t)$, то $K_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2) + K_{XY}(t_1, t_2) + K_{XY}(t_2, t_1)$.

7. Корреляционная функция суммы двух некоррелированных случайных функций равна сумме корреляционных функций слагаемых: если $Z(t) = X(t) + Y(t)$, то $K_Z(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) + K_Y(t_1, t_2)$.

Наряду с взаимной корреляционной функцией для оценки степени зависимости сечений двух случайных процессов пользуются нормированной взаимной корреляционной функцией.

Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых аргументов t_1 и t_2 :

$$r_{XY}(t_1, t_2) = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_X(t_1)D_Y(t_2)}}.$$

Нормированная взаимная корреляционная функция имеет те же свойства, что и взаимная корреляционная функция, причем свойство 4 заменяется следующим свойством: абсолютная величина нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы: $|r_{XY}(t_1, t_2)| \leq 1$.

Элементарной случайной функцией (или элементарным случайным процессом) называется функция вида: $X(t) = V \cdot \varphi(t)$, где V - случайная величина, а $\varphi(t)$ - неслучайная функция. Геометрически это семейство кривых, полученных из графика функции $\varphi(t)$ изменением масштаба по оси ординат.

Определим характеристики элементарного случайного процесса.

1. Математическое ожидание

$$m_x(t) = M(V \cdot \varphi(t)) = \varphi(t) \cdot M(V) = \varphi(t) \cdot m_V.$$

2. Корреляционная функция

$$K_X(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_V(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)M(V - m_V)^2 = \varphi(t_1)\varphi(t_2)D_V$$

3. Дисперсия $D_X(t) = K_X(t, t) = \varphi^2(t)D_V$.

Каноническим разложением случайного процесса называют его представление в виде

$$X(t) = \varphi_0(t) + \sum_i V_i \varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t)$ - неслучайные функции, называемые координатными функциями; V_i - коэффициенты канонического разложения, V_i - некоррелированные случайные величины, у которых $m_{V_i} = 0, D_{V_i} = D_i$. Сумма $\sum_i V_i \varphi_i(t)$ в каноническом разложении представляет собой центрированный случайный процесс. Каноническое разложение может содержать как конечное число членов разложения, так и бесконечное (счетное) число членов.

Математическое ожидание случайного процесса представленного в каноническом виде равно $M(X(t)) = m_X(t) = \varphi_0(t)$, так как $m_{V_i} = 0$.

Найдем корреляционную функцию

$$K_X(t_1, t_2) = M[\sum_i V_i \varphi_i(t_1) \cdot \sum_j V_j \varphi_j(t_2)] = M[\sum_i \sum_j V_i V_j \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2)].$$

По теореме сложения математических ожиданий знак суммы и знак математического ожидания можно менять местами, а неслучайные множители $\varphi_i(t_1)$ и $\varphi_j(t_2)$ можно вынести за знак математического ожидания. Тогда получим $K_X(t_1, t_2) = \sum_i \sum_j \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2) M(V_i V_j)$. При $i \neq j$ $M(V_i V_j) = 0$, так как случайные величины не коррелированы. При $i = j$ получим следующее: $M(V_i V_j) = M(V_i^2) = D_i$, так как $m_{V_i} = 0$. Выражение

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_i \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) D_i$$

является каноническим разложением корреляционной функции.

Корреляционная функция канонического разложения равна сумме корреляционных функций каждого элементарного процесса.

Дисперсия канонического разложения равна:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \sum_i \varphi_i^2(t) D_i,$$

т. е. дисперсия равна сумме дисперсий элементарных случайных процессов.

Таким образом, зная каноническое разложение случайного процесса, можно найти каноническое разложение его корреляционной функции, дисперсии и наоборот.

Задача 1. Задан случайный процесс $X(t) = \sin t + V_1 e^{-at} + V_2 e^{-bt}$, где V_1 и V_2 – некоррелированные случайные величины с характеристиками $m_{V_1} = m_{V_2} = 0$, D_{V_1}, D_{V_2} . Найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

Решение. Случайная функция $X(t)$ представлена каноническим разложением, следовательно, $m_X(t) = 0$;

$$K_X(t_1, t_2) = D_{V_1} e^{-a(t_1+t_2)} + D_{V_2} e^{-b(t_1+t_2)}; \quad D_X(t) = D_{V_1} e^{-2at} + D_{V_2} e^{-2bt}.$$

2. Преобразования случайного процесса

Пусть на вход некоторой динамической системы (измерительный прибор, радиоприемник, система автоматического управления и т. п.) подается случайный процесс $X(t)$ с известными характеристиками $m_X(t)$, $K_X(t_1, t_2)$. Система осуществляет над этим процессом преобразование A_t . Индекс t означает, что этот оператор осуществляет преобразование случайного процесса по аргументу t , обычно имеющему смысл времени.

Требуется определить характеристики на выходе системы. Запишем это преобразование символически в виде: $Y(t) = A_t\{X(t)\}$, где A_t - оператор системы. Преобразования (операторы) могут быть линейные и нелинейные. Линейные преобразования делятся на однородные и неоднородные преобразования.

Линейным однородным преобразованием (оператором) L_0 называется преобразование, обладающее двумя свойствами.

Оператор от суммы функций равен сумме операторов от каждой функции.

Для двух слагаемых имеем

$$L_0\{X_1(t) + X_2(t)\} = L_0\{X_1(t)\} + L_0\{X_2(t)\}.$$

Постоянную величину C (не зависящую от переменной, по которой проводится преобразование) можно выносить за знак оператора:

$$L_0\{CX(t)\} = CL_0\{X(t)\}.$$

Примеры линейных однородных операторов.

1. Оператор умножения на заданную функцию $\varphi(t)$: $Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$.

2. Оператор дифференцирования: $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

3. Оператор интегрирования: $Y(t) = \int_0^t X(t)dt$.

Линейным неоднородным преобразованием (оператором) называется преобразование, связанное с L_0 соотношением: $L\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - неслучайная функция.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ *сходится в среднеквадратичном* к случайной величине X , если математическое ожидание квадрата разности $X_n - X$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$: $M[(X_n - X)^2] = 0$. Случайную величину X называют пределом в среднеквадратичном последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ и пишут $X = L.i.m.X_n$.

Случайную функцию $X(t)$ называют *дифференцируемой*, если существует такая функция $X'(t)$ (ее называют производной), что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} M \left[\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - X'(t) \right]^2 = 0.$$

Итак, *производной* случайной функции $X(t)$ называют среднеквадратичный предел отношения приращения функции к приращению

аргумента Δt при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$X'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

Пусть известны характеристики случайного процесса $X(t)$, тогда характеристики производной случайного процесса $X'(t)$ определяются в соответствии со следующими теоремами.

Теорема 1. Математическое ожидание производной $X'(t)$ случайного процесса $X(t)$ равно производной от его математического ожидания:
 $m_{X'}(t) = m'_X(t)$.

Теорема 2. Корреляционная функция производной случайного процесса $X'(t)$ равна второй смешанной производной от корреляционной функции исходного случайного процесса $K_{X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$.

Теорема 3. Взаимная корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ и ее производной $X'(t)$ равна частной производной от корреляционной функции по соответствующему аргументу (если индекс X' при функции K записан на первом (втором) месте, то дифференцируют по первому (второму) аргументу):

$$K_{X'X}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1}; \quad K_{XX'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

Задача 1. На вход дифференцирующей системы поступает случайный процесс $X(t) = 5tV + 4t^2 - 1$, где V - случайная величина, $m_V = 2$, $D_V = 4$. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию производной случайного процесса $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Решение. Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ равно:
 $m_X(t) = M(5tV + 4t^2 - 1) = 5tm_V + 4t^2 - 1 = 10t + 4t^2 - 1$. Математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ равно: $m_Y(t) = (m_X(t))' = 10 + 8t$. Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ равна:

$$K_X(t_1, t_2) = 5t_1 5t_2 K_V = 5t_1 t_2 D_V = 25t_1 t_2 \cdot 4 = 100t_1 t_2.$$

Корреляционная функция случайного процесса $Y(t)$ равна:

$$K_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 (100t_1 t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 100.$$

Интегралом от случайной функции $X(t)$ по отрезку $[0, t]$ называется предел в среднеквадратическом интегральной суммы при стремлении к нулю частичного интервала $\Delta\tau_i$ максимальной длины:

$$Y(t) = \text{L.i.m.}_{\Delta\tau_i \rightarrow 0} \sum X(\tau_i) \cdot \Delta\tau_i = \int_0^t X(\tau) d\tau.$$

Характеристики интеграла от случайного процесса находятся в соответствии со следующими теоремами.

Теорема 4. Математическое ожидание интеграла от случайного процесса равно интегралу от математического ожидания этого случайного процесса:

$$m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau) d\tau.$$

Теорема 5. Корреляционная функция интеграла от случайного процесса равна двойному интегралу от корреляционной функции исходного случайного процесса.

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Теорема 6. Взаимная корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ и интеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$ равна интегралу от корреляционной функции случайного процесса $X(t)$:

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_X(t_1, \tau) d\tau; \quad K_{YX}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} K_X(\tau, t_2) d\tau.$$

Задача 2. Зная математическое ожидание $m_X(t) = 2t + 1$ и корреляционную функцию $K_X(t_1, t_2) = 4t_1 t_2 + 9t_1^2 t_2^2$ случайного процесса $X(t)$, найти математическое ожидание и корреляционную функцию интеграла

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau.$$

Решение. Математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$ находится

по теореме 4: $m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau) d\tau = \int_0^t (2\tau + 1) d\tau = t^2 + t$. Корреляционная функция

находится по теореме 5: $K_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (4\tau_1\tau_2 + 9\tau_1^2\tau_2^2) d\tau_1 d\tau_2$. Выполнив

интегрирование, получим искомую корреляционную функцию.

3. Стационарные случайные процессы

На практике часто встречаются случайные процессы, которые протекают во времени приблизительно однородно и имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения. Такие случайные процессы называются стационарными. Они характеризуют, как правило, установившийся режим работы. При определении стационарности подразделяют понятия стационарных случайных процессов в узком и широком смысле.

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле*, если все его n -мерные законы распределения не изменяются с изменением начала отсчета времени.

Случайный процесс называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянно $m_X(t) = const$, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов:

$$K_X(t_1, t_2) = k_X(t_2 - t_1) = k_X(\tau), \text{ где } \tau = t_2 - t_1.$$

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Далее будут рассматриваться случайные процессы стационарные в широком смысле, которые будут называться просто стационарными.

Свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса.

1. Корреляционная функция стационарного случайного процесса -

четная функция: $k_X(\tau) = k_X(-\tau)$.

2. Абсолютная величина корреляционной функции стационарного случайного процесса не превышает ее значения в начале координат: $|k_X(\tau)| \leq k_X(0)$.

3. Корреляционная функция стационарного случайного процесса в начале координат равна дисперсии случайного процесса: $k_X(0) = D_X$.

Стационарно связанными называют две случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$: $K_{XY}(t_1, t_2) = k_{XY}(\tau)$.

Взаимная корреляционная функция стационарно связанных случайных функций обладает следующим свойством: $k_{XY}(\tau) = k_{YX}(-\tau)$.

Изменения корреляционной функции при дифференцировании и интегрировании стационарных случайных процессов показывают следующие теоремы.

Теорема 1. Корреляционная функция производной $X'(t)$ дифференцируемого случайного процесса $X(t)$ равна второй производной от ее корреляционной функции, взятой со знаком минус: $k_{X'X'}(\tau) = -k''_{XX}(\tau)$.

Теорема 2. Взаимная корреляционная функция дифференцируемого стационарного случайного процесса $X(t)$ и его производной $X'(t)$ равна первой производной от корреляционной функции $k_X(\tau)$, взятой со своим (противоположным) знаком, если индекс X' стоит на втором (первом) по порядку месте:

$$k_{XX'}(\tau) = k'_{X'X}(\tau); \quad k_{X'X'}(\tau) = -k''_{XX}(\tau).$$

Предполагается, что $\tau = t_2 - t_1$.

Теорема 3. Корреляционная функция интеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$ от стационарного случайного процесса $X(t)$ равна

$$k_Y(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_2 - \tau) k_X(\tau) d\tau - \int_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - \tau) k_X(\tau) d\tau + \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) k_X(\tau) d\tau.$$

Следствие. Дисперсия интеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$ от стационарного

случайного процесса $X(t)$ равна $D_Y = 2 \int_0^t (t-\tau) k_X(\tau) d\tau$.

Задача 1. Рассматривается случайный процесс $X(t)$, заданный своим каноническим разложением: $X(t) = m_X + \sum_{i=1}^n (U_i \cos w_i t + V_i \sin w_i t)$, где U_i и V_i – действительные центрированные некоррелированные случайные величины, т. е. $MU_i = MV_i = 0$, $M(U_i U_j) = M(V_i V_j) = M(U_i V_j) = 0$, для любых $i \neq j$, $M(U_i^2) = M(V_i^2) = d_i$, $i=1, 2, \dots, n$. Показать, что этот процесс является стационарным.

Решение. Найдем математическое ожидание случайного процесса $X(t)$:

$$m_X(t) = M[m_X] + M \left[\sum_{i=1}^n (U_i \cos w_i t + V_i \sin w_i t) \right] = m_X.$$

Найдем корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$:

$$\begin{aligned} K_X(\alpha_1, \alpha_2) &= M \left[\tilde{X}(\alpha_1) \cdot \tilde{X}(\alpha_2) \right] = \\ &= M \left[\sum_{i=1}^n (U_i \cos w_i \alpha_1 + V_i \sin w_i \alpha_1) \cdot \sum_{j=1}^n (U_j \cos w_j \alpha_2 + V_j \sin w_j \alpha_2) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n d_i (\sin w_i \alpha_1 \cdot \sin w_i \alpha_2 + \cos w_i \alpha_1 \cdot \cos w_i \alpha_2) = \sum_{i=1}^n d_i \cos(w_i(\alpha_1 - \alpha_2)) \end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит от разности аргументов. Дисперсия случайного процесса $X(t)$ равна $D_X = \sum_{i=1}^n d_i$.

Стационарные случайные процессы находят широкое применение для моделирования реальных случайных процессов. Это связано с тем, что для многих из них характеристики можно определить, исходя только из одной реализации, полученной на протяжении достаточно большого времени.

Стационарную случайную функцию $X(t)$ называют *эргодической*, если ее характеристики, найденные усреднением множества реализаций, совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени одной реализации $x(t)$, которая наблюдалась на интервале $(0, T)$ достаточно большой длительности.

Для эргодического стационарного случайного процесса $X(t)$ математическое ожидание может быть определено из выражения

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = const.$$

Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса $X(t)$ по математическому ожиданию является $\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_X(\tau) = 0$.

Необходимым и достаточным условием эргодичности случайного процесса $X(t)$ по математическому ожиданию является

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) k_X(t) dt = 0.$$

Корреляционная функция эргодического случайного процесса может быть определена по формуле

$$K_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - m_X][X(t + \tau) - m_X] dt.$$

Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса $X(t)$ по корреляционной функции является $\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_Y(\tau) = 0$, где $k_Y(\tau)$ - корреляционная функция случайного процесса $Y(t, \tau) = \overset{\circ}{X}(t) \cdot \overset{\circ}{X}(t + \tau)$, где $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$.

В качестве оценок математического ожидания и корреляционной функции эргодического случайного процесса принимают

$$\tilde{m}_X = M[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad \text{и} \quad \tilde{k}_X(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} \overset{\circ}{x}(t) \cdot \overset{\circ}{x}(t + \tau) dt,$$

где $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - m_X(t)$.

Оценку корреляционной функции эргодического случайного процесса также можно получить по формуле

$$\tilde{k}_X(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} x(t) \cdot x(t + \tau) dt - [\tilde{m}_X]^2.$$

Таким образом, для эргодических случайных процессов достаточно записать в статистическом эксперименте одну достаточно «длинную» реализацию случайного процесса, чтобы приближенно определить его характеристики.

Практически интегралы вычисляют приближенно, например, по

формуле прямоугольников. С этой целью делят интервал $(0, T)$ на n частичных интервалов длиной $\Delta t = T/n$; в каждом частичном i -м интервале выбирают одну точку, например его середину t_i . В итоге оценка математического ожидания принимает вид $\tilde{m}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t_i)$.

Аналогично приближенно вычисляют оценку корреляционной функции, полагая, что τ принимает значения $\Delta t, 2\Delta t, \dots, (n-1)\Delta t$, или, что тоже, $T/n, 2T/n, \dots, (n-1)T/n$. В итоге оценки корреляционной функции принимают вид:

$$\tilde{k}_X\left(\frac{lT}{n}\right) = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^{n-l} x(t_i) \cdot x(t_{i+l}) - [\tilde{m}_X]^2,$$

$$\tilde{k}_X\left(\frac{lT}{n}\right) = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^{n-l} x(t_i) \cdot x(t_{i+l}) - [\tilde{m}_X]^2,$$

где $l=1, 2, \dots, n-1$.

Гармоническое колебание $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ с детерминированной частотой ω_0 и фазой θ_0 и случайной амплитудой A , равномерно распределённой в интервале от 0 до A , есть процесс нестационарный и неэргодический. Если амплитуда A и частота - детерминированные величины, а θ_0 - случайная величина, равномерно распределённая в интервале $(-\pi, \pi)$, то процесс стационарный и эргодический. Гармоническое колебание со случайной амплитудой и фазой образует стационарный, но неэргодический процесс.

Каноническое разложение стационарного случайного процесса имеет вид

$$X(t) = m_X + \sum_{j=0}^{\infty} (U_j \cos \omega_j t + V_j \sin \omega_j t),$$

где U_j, V_j ($j=0, 1, \dots$) – центрированные, некоррелированные случайные величины с попарно равными дисперсиями $DU_j = DV_j = D_j$. Разложение $X(t)$ называется *спектральным*. Спектральному разложению случайного процесса соответствует разложение в ряд ее корреляционной функции

$$k_X(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} D_j \cos w_j \tau, \text{ откуда } D_X = \sum_{j=0}^{\infty} D_j.$$

Спектральное разложение стационарного случайного процесса при $w_0=0$ можно переписать в комплексной форме:

$$X(t) = m_X + \sum_{j=-\infty}^{\infty} W_j e^{i w_j t},$$

$$\text{где } w_{-j} = -w_j, W_0 = U_0, W_j = \frac{U_j - iV_j}{2}, W_{-j} = \frac{U_j + iV_j}{2}, (j=1,2,\dots).$$

Спектральной плотностью стационарного случайного процесса $X(t)$ называется предел отношения дисперсии, приходящийся на данный интервал частот, к длине этого интервала, когда последняя стремится к нулю. Спектральная плотность $S_X(w)$ и корреляционная функция $k_X(\tau)$ связаны преобразованиями Фурье. В действительной форме они имеют вид

$$S_X(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_X(\tau) \cos w \tau d\tau, k_X(\tau) = \int_0^{\infty} S_X(w) \cos w \tau dw,$$

из последнего соотношения вытекает, что

$$D_X = k_X(0) = \int_0^{\infty} S_X(w) dw.$$

В комплексной форме преобразования Фурье, связывающие спектральную плотность $S_X^*(w)$ и корреляционную функцию, имеют вид

$$S_X^*(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_X(\tau) e^{-i w \tau} d\tau, k_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X^*(w) e^{i w \tau} dw, \text{ где } S_X^*(w) = \frac{1}{2} S_X(w).$$

Как $S_X(w)$, так и $S_X^*(w)$, - действительные, неотрицательные четные функции, но $S_X(w)$ рассматривается только в интервале $(0, \infty)$.

Нормированной спектральной плотностью $s_x(w)$, $s_x^*(w)$ называется спектральная плотность, деленная на дисперсию случайной функции

$$s_x(w) = \frac{S_X(w)}{D_X}; s_x^*(w) = \frac{S_X^*(w)}{D_X}.$$

Белым шумом называется случайная функция $X(t)$, любые два различные (сколь угодно близкие) сечения которой некоррелированы и

корреляционная функция которой пропорциональна дельта-функции:

$$K_X(t_1, t_2) = G(t_1) \cdot \delta(t_1 - t_2).$$

Величина $G(t)$ называется *интенсивностью* белого шума.

Стационарным белым шумом называется белый шум с постоянной интенсивностью $G(t) = G = const$. Корреляционная функция стационарного белого шума имеет вид $k_X(\tau) = G \cdot \delta(\tau)$, откуда его спектральная плотность постоянна и равна $S_X^*(w) = \frac{G}{2\pi}$. Дисперсия стационарного белого шума равна $D_X = G \cdot \delta(0)$, то есть бесконечна.

Задача 2. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики $m_X(t) = 0$, $k_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|}$. Найти ее спектральную плотность $S_X^*(w)$.

Решение.

$$S_X^*(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_X(\tau) e^{-iw\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} D_X e^{-(\alpha + iw)\tau} d\tau = \frac{D_X}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + w^2}.$$

4. Марковские случайные процессы.

Дискретные цепи Маркова

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Поток событий называется *стационарным*, если его вероятностные характеристики не зависят от выбора начала отсчета, т. е. если вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины этого интервала и не зависит от того, где именно на оси $0t$ он расположен. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный интервал времени Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Практически ординарность потока означает, что события в нем появляются по одному, а не группами по два, по три, и так далее (точное совпадение моментов появления двух событий теоретически возможно, но

имеет нулевую вероятность). Поток событий называется *потоком без последствия*, если число событий, попадающих на любой интервал времени τ , не зависит от того, сколько событий попало на любой другой не пересекающийся с ним интервал. Практически отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга. Поток событий называется *простейшим*, если он стационарен, ординарен и не имеет последствия. Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (при $t > 0$), где $\lambda = \frac{1}{M[T]}$ - величина, обратная среднему значению интервала T .

Ординарный поток без последствия называется *пуассоновским*. Простейший поток есть частный случай пуассоновского (а именно стационарный пуассоновский поток). *Интенсивностью* λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящихся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = const$, для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$. Мгновенная интенсивность потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t + \Delta t)$, к длине Δt этого интервала, когда она стремится к нулю. Среднее число событий, наступающих на интервале времени τ , следующим непосредственно за моментом t_0 , равно $a(t_0, \tau) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt$. Если поток событий стационарный, то $a(t_0, \tau) = a(\tau) = \lambda \tau$.

Ординарный поток событий называется *потоком Пальма* (или *рекуррентным* потоком, или потоком с ограниченным последствием), если интервалы времени T_1, T_2, \dots между последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины. В связи с одинаковым распределением T_1, T_2, \dots поток Пальма всегда стационарен. Простейший поток является частным случаем потока

Пальма; в нем интервалы между событиями распределены по показательному закону.

Потоком Эрланга k -го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждое k -ое событие в потоке, а все промежуточные выбрасываются. Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k -го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин T_1, T_2, \dots, T_k , имеющих показательное распределение с параметром λ : $T = \sum_{i=1}^k T_i$.

Закон распределения случайной величины T называется *законом Эрланга k -го порядка* и имеет плотность $f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$, при $t > 0$. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T соответственно равны:

$$m_t = k/\lambda; \quad D_t = k/\lambda^2; \quad \sigma_t = \sqrt{k}/\lambda.$$

Коэффициент вариации случайной величины T равен $v_t = \sigma_t/m_t = 1/\sqrt{k}$; $v_t \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т. е. при увеличении порядка потока Эрланга «степень случайности» интервала между событиями стремится к нулю. Если одновременно с «прореживанием» простейшего потока изменять масштаб по оси Ot (делением на k), получится *нормированный* поток Эрланга k -го порядка, интенсивность которого не зависит от k . Интервал времени \tilde{T} между соседними событиями в нормированном потоке Эрланга k -го порядка имеет плотность

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\lambda t}, \text{ при } t > 0.$$

Числовые характеристики случайной величины равны:

$$M|\tilde{T}| = 1/\lambda; \quad D|\tilde{T}| = 1/k\lambda^2; \quad \tilde{\sigma}_t = 1/(\lambda\sqrt{k}); \quad v_t = 1/\sqrt{k}.$$

При увеличении k нормированный поток Эрланга неограниченно приближается к *регулярному потоку* с постоянным интервалом $l = 1/\lambda$ между

событиями.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо физической системе S , называется *марковским* (или процессом без последствия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние. Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем обычно называют *марковской цепью*. Для такого процесса моменты t_1, t_2, \dots , когда система S может менять свое состояние, удобно рассматривать как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, рассматривать не время t , а номер шага: $1, 2, \dots, k, \dots$. Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$, где $S(0)$ – начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ – состояние системы непосредственно после первого шага; \dots ; $S(k)$ – состояние системы непосредственно после k – шага \dots

Рассмотрим процесс с n возможными состояниями S_1, S_2, \dots, S_n . Если обозначить $X(t)$ номер состояния, в котором находится система S в момент t , то процесс описывается целочисленной случайной функцией $X(t) > 0$, возможные значения которой равны $1, 2, \dots, n$. Эта функция совершает скачки от одного целочисленного значения к другому в заданные моменты t_1, t_2, \dots

Рассмотрим одномерный закон распределения случайной функции $X(t)$. Обозначим через $p_i(k)$ вероятность того, что после k -го шага система S будет в состоянии S_i . Вероятности $p_i(k)$ называются *вероятностями состояний* цепи Маркова. Очевидно, для любого k

$$\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1.$$

Распределение вероятностей состояний в начале процесса $p_1(0), p_2(0), \dots$,

$p_1(0), \dots, p_n(0)$ называется *начальным распределением вероятностей* марковской цепи. В частности, если начальное состояние $S(0)$ системы S известно, например $S(0) = S_i$, начальная вероятность $p_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю: $p_j(0) = 0$ для $j \neq i$.

Вероятностью перехода на k – м шаге из состояния S_i в состояние S_j называется условная вероятность того, что система S после k – го шага окажется в состоянии S_j при условии, что непосредственно перед этим она находилась в состоянии S_i . Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход:

$$P\{S(k) = S_j | S(k-1) = S_i\} = P_{ij}.$$

Переходные вероятности однородной марковской цепи P_{ij} образуют квадратную матрицу порядка n :

$$P_1 = (P_{ij}) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

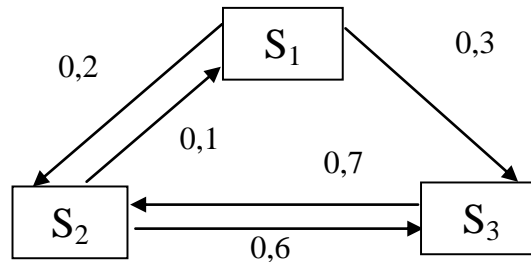
Матрица переходных вероятностей P_1 обладает свойством: $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$, ($i=1, \dots, n$). Матрицу, обладающую этим свойством, называют *стохастической*. Вероятность P_{ii} есть не что иное, как вероятность того, что система, пришедшая к данному шагу в состояние S_i , в нем же задержится на очередном шаге. Вероятности перехода системы из состояния S_i в состояние S_j за два шага составляют матрицу $P_2 = P_1 P_1 = P_1^2$. Аналогично получается матрица вероятностей перехода за m шагов: $P_m = P_1^m$.

Если для однородной цепи Маркова заданы начальное распределение вероятностей и матрица переходных вероятностей, то вероятности состояний системы $p_i(k)$ ($i=1, 2, \dots, n$) могут быть определены по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1)P_{ij}, \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, n).$$

В однородной цепи Маркова, если все состояния являются существенными, а число состояний конечно, то существует предел $\lim_{u \rightarrow \infty} P_i(u) = p_i$, определяемый из системы уравнений $P_i = \sum_{j=1}^n P_j P_{ji}$ $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Задача. Для заданного графа состояний однородной цепи Маркова найти: 1) матрицы вероятностей перехода системы за один и два шага; 2) вероятности состояний системы после первого, второго и третьего шага, если в начальный момент времени система находилась в состоянии S_2 ; 3) предельные вероятности состояний системы.



Решение. Поскольку вероятности перехода системы за один шаг из состояния S_1 в состояния S_2 и S_3 соответственно равны 0,2 и 0,3, то вероятность системы остаться в состоянии S_1 за один шаг равна 0,5, т. е. $p_{11}=0,5$, $p_{12}=0,2$ и $p_{13}=0,3$. Аналогично получаем $p_{21}=0,1$, $p_{22}=0,3$ и $p_{23}=0,6$. Поскольку система не может перейти из состояния S_3 в состояние S_1 за один шаг, то $p_{31}=0$, $p_{32}=0,7$, $p_{33}=0,3$.

Матрицы вероятностей перехода за один и два шага:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,37 & 0,36 \\ 0,08 & 0,53 & 0,39 \\ 0,07 & 0,42 & 0,51 \end{pmatrix}$$

Вероятности состояний системы в начальный момент времени, после первого, второго и третьего шага равны: $P_0=(0; 1; 0)$, $P_1=(0,1; 0,3; 0,6)$,

$P_2=(0,08; 0,53; 0,39)$, $P_3=(0,093; 0,448; 0,459)$.

Система уравнений для предельных вероятностей состояний системы имеет вид

$$\begin{cases} 0,5p_1 + 0,1p_2 = p_1, \\ 0,2p_1 + 0,3p_2 + 0,7p_3 = p_2, \\ 0,3p_1 + 0,6p_2 + 0,3p_3 = p_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Предельные вероятности состояний системы равны: $p_1 = \frac{7}{75}$, $p_2 = \frac{7}{15}$,
 $p_3 = \frac{11}{25}$.

Непрерывные цепи Маркова

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называют непрерывной цепью Маркова. Для такого процесса вероятность перехода из состояния S_i в S_j для любого момента времени равна нулю. Вместо вероятности перехода P_{ij} рассматривают *плотность вероятности перехода* λ_{ij} , которая определяется как предел отношения вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j за малый промежуток времени Δt , примыкающий к моменту t , к длине этого промежутка, когда она стремится к нулю. Плотность вероятности перехода может быть как постоянной ($\lambda_{ij} = const$), так и зависящей от времени ($\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$). В первом случае Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *однородным*. Пример такого процесса – случайный процесс $X(t)$, представляющий собой число появившихся до момента t событий в простейшем потоке.

При рассмотрении случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем можно представлять переходы системы S из состояния в состояние как происходящие под влиянием некоторых потоков событий; при этом плотности вероятностей перехода получают смысл интенсивностей λ_{ij} соответствующих потоков событий (как только

происходит первое событие в потоке с интенсивностью λ_{ij} , система из состояния S_i скачком переходит в S_j). Если все эти потоки пуассоновские, то процесс, протекающий в системе S , будет Марковским.

Вероятность того, что система S , находящаяся в состоянии S_i , за элементарный промежуток времени $(t, t+dt)$ перейдет в состояние S_j , есть вероятность того, что за это время dt появится хотябы одно событие потока, переводящее систему S из S_i в S_j . С точностью до бесконечно малых высших порядков эта вероятность равна $\lambda_{ij} dt$.

Потоком вероятности перехода из состояния S_i в состояние S_j называется величина $\lambda_{ij} p_i(t)$ (здесь интенсивность λ_{ij} может быть как зависящей так и независящей от времени).

Если система S имеет конечное число состояний S_1, S_2, \dots, S_n , то для описания случайного процесса, протекающего в этой системе, применяются вероятности состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$, где $p_i(t)$ – вероятность того, что система S в момент t находится в состоянии S_i : $p_i(t) = P\{S(t) = S_i\}$. Очевидно, для любого t выполняется $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$.

Для нахождения вероятностей состояний нужно решить систему дифференциальных уравнений Колмогорова, имеющих вид

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}, \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Интенсивности потоков λ_{ij} могут зависеть от времени t .

Уравнения Колмогорова удобно составлять, пользуясь следующим правилом: производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, переводящих из других состояний в данное, минус сумма всех потоков вероятности, переводящих из данного состояния в другие.

Так как для любого t выполняется условие $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$, можно любую из

вероятностей состояний выразить через остальные и таким образом уменьшить число уравнений на одно. Чтобы решить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$, нужно задать начальное распределение вероятностей $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$, сумма которых равна единице $\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1$.

Во многих случаях, когда процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, возникает вопрос о предельном поведении вероятностей $p_i(t)$, при $t \rightarrow \infty$. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими, в некоторых случаях существуют *финальные* (или предельные) вероятности состояний $p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$), не зависящие от того, в каком состоянии система S находилась в начальный момент. Это означает, что с течением времени в системе S устанавливается *предельный стационарный режим*, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний уже не меняются. В этом предельном режиме каждая финальная вероятность может быть истолкована как среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Система, для которой существуют финальные вероятности, называется *эргодической* и соответствующий случайный процесс – эргодическим.

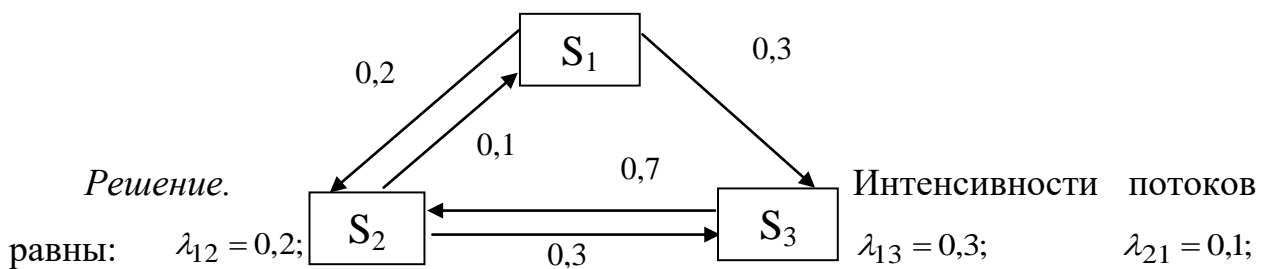
Для существования финальных вероятностей состояний одного условия $\lambda_{ij} = \text{const}$ недостаточно, требуется еще выполнение некоторых условий. Состояние S_i называется *существенным*, если нет другого такого состояния S_j такого, что, перейдя однажды каким-то способом из S_i в S_j , система уже не может вернуться в S_i . Все состояния, не обладающие таким свойством, называются *несущественными*. При конечном числе состояний n для существования финальных вероятностей необходимо и достаточно, чтобы из каждого существенного состояния можно было (за какое-то число шагов) перейти в каждое другое существенное состояние.

Финальные вероятности состояний (если они существуют) могут быть

получены решением системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если положить их левые части (производные) равными нулю. Однако удобнее составлять эти уравнения пользуясь правилом: для каждого состояния суммарный выходящий поток вероятностей равен суммарному входящему.

Таким образом, получается система n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными p_1, p_2, \dots, p_n . Из этой системы можно найти неизвестные с точностью до произвольного множителя. Чтобы найти точные значения p_1, p_2, \dots, p_n к уравнениям добавляют *нормировочное условие* $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Задача. Для заданного графа состояний непрерывной цепи Маркова найти: 1) вероятности состояний, если в начальный момент система находилась в состоянии S_2 ; 2) предельные вероятности состояний.



Система уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{cases} p_1' = \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1, \\ p_2' = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2, \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{32} + \lambda_{31})p_3. \end{cases}$$

Подставляя известные значения интенсивностей потоков, получим

$$\begin{cases} p_1' = 0,1p_2 - 0,5p_1, \\ p_2' = 0,2p_1 + 0,7p_3 - 0,4p_2, \\ p_3' = 0,3p_1 + 0,3p_2 - 0,7p_3. \end{cases}$$

Из нормировочного условия выразим p_3 : $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Подставляя выражение p_3 во второе уравнение системы, получим

$$\begin{cases} p_1' = 0,1p_2 - 0,5p_1, \\ p_2' = 0,7 - 0,5p_1 - 1,1p_2. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения p_2 и продифференцируем:

$$p_2 = 10p_1' + 5p_1; \quad p_2' = 10p_1'' + 5p_1'.$$

Подставим p_2 и p_2' во второе уравнение: $10p_1'' + 16p_1' + 6p_1 = 0,7$.

Общим решением последнего уравнения является функция $p_1(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-0,6t} + \frac{7}{60}$. Дифференцируя $p_1'(t) = -C_1e^{-t} - 0,6C_2e^{-0,6t}$, найдем $p_2(t) = -5C_1e^{-t} - C_2e^{-0,6t} + \frac{35}{60}$, отсюда $p_3(t) = 4C_1e^{-t} + \frac{18}{60}$.

Поскольку в начальный момент времени система находилась в состоянии S_2 , то $p_1(0) = 0$; $p_2(0) = 1$; $p_3(0) = 0$. Используя первые два условия

составим систему уравнений для неизвестных C_1 и C_2 :
$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{7}{60} = 0, \\ -5C_1 - C_2 + \frac{35}{60} = 1, \end{cases}$$

откуда получим $C_1 = -\frac{9}{120}$, $C_2 = -\frac{1}{24}$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 окончательно получаем

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{1}{120} \left(14 - 9e^{-t} - 5e^{-0,6t} \right), \\ p_2(t) &= \frac{1}{24} \left(14 + 9e^{-t} + e^{-0,6t} \right), \\ p_3(t) &= \frac{3}{10} \left(1 - e^{-t} \right). \end{aligned}$$

Предельные вероятности состояний системы равны:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{120} \left(14 - 9e^{-t} - 5e^{-0,6t} \right) = \frac{7}{60};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{24} \left(14 + 9e^{-t} + e^{-0,6t} \right) = \frac{7}{12};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{18}{60} \left(1 - e^{-t} \right) = \frac{3}{10}.$$

Список рекомендуемой литературы

Основная

1. Тихонов, В.Н. Статистическая радиотехника / В.Н. Тихонов. М.: Радио и связь, 1982.
2. Тихонов, В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.Н. Тихонов, В.Н. Харисов. М.: Радио и связь, 2004. 608 с.
3. Рытов, С.М. Введение в статистическую радиофизику: В 2 ч. / С.М. Рытов. М.: Наука, 1978.
4. Левин, Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. М.: Радио и связь, 1989.
5. Ван Трис, Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции / Г. Ван Трис. М.: Сов.радио, 1976.
6. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Мала. М.: Мир, 2005.

Дополнительная

1. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. М.: Техносфера, 2006.
2. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. М.: Техносфера, 2005.